@Otmar:
„Es seien drei Punkte A, B und C gegebene, die nicht auf einer Gerade liegen.“

Demzufolge können die drei Punkt nur in einem Dreieck (ABC) angeordnet sein.

Wenn ein vierter Punkt hinzugefügt wird und alle möglichen Routen gleichlang sein sollen, muss der vierte Punkt innerhalb des Dreiecks (ABC) liegen.
Da die ergänzende Routenstrecke aus einem Dreieckseckpunkt entspringen muss, bietet sich hierfür augenscheinlich der größere Teil der Schwerelinien $s_{(abc)}$ bzw. die Seitenhalbierenden, die im Verhältnis 2:1 im Schwerpunkt S (D) geteilt werden an.

Eine Seitenhalbierende $s_{(abc)}$ führt von einem Dreieckseckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Dreiecksseite und errechnet sich wie folgt.

$$\boldsymbol{s_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}} \quad \textit{\textbf{Daraus folgt die Routenteilstrecke}}\ \boldsymbol{s_A} \quad \boldsymbol{s_A = \frac{2s_a}{3}}$$

$$\boldsymbol{s_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}} \quad \textit{\textbf{Daraus folgt die Routenteilstrecke}}\ \boldsymbol{s_B} \quad \boldsymbol{s_B = \frac{2s_b}{3}}$$

$$\boldsymbol{s_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}} \quad \textit{\textbf{Daraus folgt die Routenteilstrecke}}\ \boldsymbol{s_C} \quad \boldsymbol{s_C = \frac{2s_c}{3}}$$

Somit ergeben sich für die vier Ortspunkte (ABCD) nur drei mögliche Routen.

1. A – B – C – D – A
   c a $\boldsymbol{s_C}$ $\boldsymbol{s_A}$
2. A – B – D – C – A
   c $\boldsymbol{s_B}$ $\boldsymbol{s_C}$ **b**
3. A – D – B – C – A
   $\boldsymbol{s_A}$ $\boldsymbol{s_B}$ **a b**

Demzufolge ist:

$$\mathbf{c + a + } \boldsymbol{s_C + s_A} \mathbf{ = c + } \boldsymbol{s_B + s_C} \mathbf{ + b}$$

$$\mathbf{a + } \boldsymbol{s_A} \mathbf{ = } \boldsymbol{s_B} \mathbf{ + b}$$

$$\mathbf{c + a + } \boldsymbol{s_C + s_A} \mathbf{ = } \boldsymbol{s_A + s_B} \mathbf{ + a + b}$$

$$\mathbf{c + } \boldsymbol{s_C} \mathbf{ = } \boldsymbol{s_B} \mathbf{ + b}$$

$$\mathbf{c + } \boldsymbol{s_B + s_C} \mathbf{ + b = } \boldsymbol{s_A + s_B} \mathbf{ + a + b}$$

$\mathbf{c} + s_C = s_A + \mathbf{a}$

➔ s_A **Desweiter** $+ \ \mathbf{a} = s_B + \mathbf{b} = s_C + \mathbf{c}$

Infolgedessen, ist das Dreieck (ABC) ein gleichseitiges Dreieck, woraus hervorgeht, das die Dreieckspunkte S (D) für Schwerpunkt, Inkreis Mittelpunkt und Umkreis Mittelpunkt identisch sind.

Des Weiteren, sind die Schwerelinien $s_{(abc)}$, Winkelhalbierenden $w_{(abc)}$ und Dreieckshöhen $h_{(abc)}$ identisch.

Jetzt lassen sich die Schwerelinien $s_{(abc)}$ wie folgt berechnen.

$$s_{abc} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textit{Daraus folgt die Routenteilstrecke} \quad s_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wie oben schon erwähnt, entspricht diese Routenteilstrecke auch dem Umkreisradius r.

$$s_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Mit diesem Vorwissen, ist folglich die Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes mit dem Schwerpunkt gesucht, wo man nachher die vier Dreieckpunkte ABCD miteinander verbindet.
Das geht klassisch, oder m. E. schneller, indem man mit dem Zirkel den Umkreisradius r des Dreiecks einspannt, an dem Dreieckpunkt D (S) einsticht und einen Kreis zieht. Nun wählt man auf der Kreislinie z. B. den Eckpunkt A aus und trägt von dort zweimal die Seitenlänge a auf der Kreislinie ab. Nun muss man nur noch die vier Dreieckpunkte ABCD miteinander verbinden.
Nun hat man alle vier Ortspunkte mit den jeweils drei gleichlangen Routen konstruiert und definiert.